Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat
Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan
Tahun 2017

MODUL 2

Tatanan Rumah

MATEMATIKA PERMINATAN
PAKET C SETARA SMA/MA

Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan
Direktorat Jenderal Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat
Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan
Tahun 2017

MODUL 2

Tatanan Rumah

MATEMATIKA PERMINATAN
PAKET C SETARA SMA/MA

Matematika Peminatan Paket C Tingkatan V Modul Tema 2
Modul Tema 2 : Tatanan Rumah

- Penulis: Sri Haryati, S.Pd., M.Si.

- Diterbitkan oleh: Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan-Ditjen Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat-Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan, 2018

iv+ 40 hlm + illustrasi + foto; 21 x 28,5 cm

Modul Dinamis: Modul ini merupakan salah satu contoh bahan ajar pendidikan kesetaraan yang berbasis pada kompetensi inti dan kompetensi dasar dan didesain sesuai kurikulum 2013. Sehingga modul ini merupakan dokumen yang bersifat dinamis dan terbuka lebar sesuai dengan kebutuhan dan kondisi daerah masing-masing, namun merujuk pada tercapainya standar kompetensi dasar.

Kata Pengantar

Pendidikan kesetaraan sebagai pendidikan alternatif memberikan layanan kepada mayarakat yang karena kondisi geografis, sosial budaya, ekonomi dan psikologis tidak berkesempatan mengikuti pendidikan dasar dan menengah di jalur pendidikan formal. Kurikulum pendidikan kesetaraan dikembangkan mengacu pada kurikulum 2013 pendidikan dasar dan menengah hasil revisi berdasarkan peraturan Mendikbud No.24 tahun 2016. Proses adaptasi kurikulum 2013 ke dalam kurikulum pendidikan kesetaraan adalah melalui proses kontekstualisasi dan fungsionalisasi dari masing-masing kompetensi dasar, sehingga peserta didik memahami makna dari setiap kompetensi yang dipelajari.

Pembelajaran pendidikan kesetaraan menggunakan prinsip flexible learning sesuai dengan karakteristik peserta didik kesetaraan. Penerapan prinsip pembelajaran tersebut menggunakan sistem pembelajaran modular dimana peserta didik memiliki kebebasan dalam penyelesaian tiap modul yang di sajikan. Konsekuensi dari sistem tersebut adalah perlunya disusun modul pembelajaran pendidikan kesetaraan yang memungkinkan peserta didik untuk belajar dan melakukan evaluasi ketuntasan secara mandiri.

Tahun 2017 Direktorat Pembinaan Pendidikan Keaksaraan dan Kesetaraan, Direktorat Jendral Pendidikan Anak Usia Dini dan Pendidikan Masyarakat mengembangkan modul pembelajaran pendidikan kesetaraan dengan melibatkan pusat kurikulum dan perbukuan kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru dan tutor pendidikan kesetaraan. Modul pendidikan kesetaraan disediakan mulai paket A tingkat kompetensi 2 (kelas 4 Paket A). Sedangkan untuk peserta didik Paket A usia sekolah, modul tingkat kompetensi 1 (Paket A setara SD kelas 1-3) menggunakan buku pelajaran Sekolah Dasar kelas 1-3, karena mereka masih memerlukan banyak bimbingan guru/tutor dan belum bisa belajar secara mandiri.

Kami mengucapkan terimakasih atas partisipasi dari Pusat Kurikulum dan Perbukuan Kemdikbud, para akademisi, pamong belajar, guru, tutor pendidikan kesetaraan dan semua pihak yang telah berpartisipasi dalam penyusunan modul ini.

Jakarta, Desember 2017
Direktur Jenderal

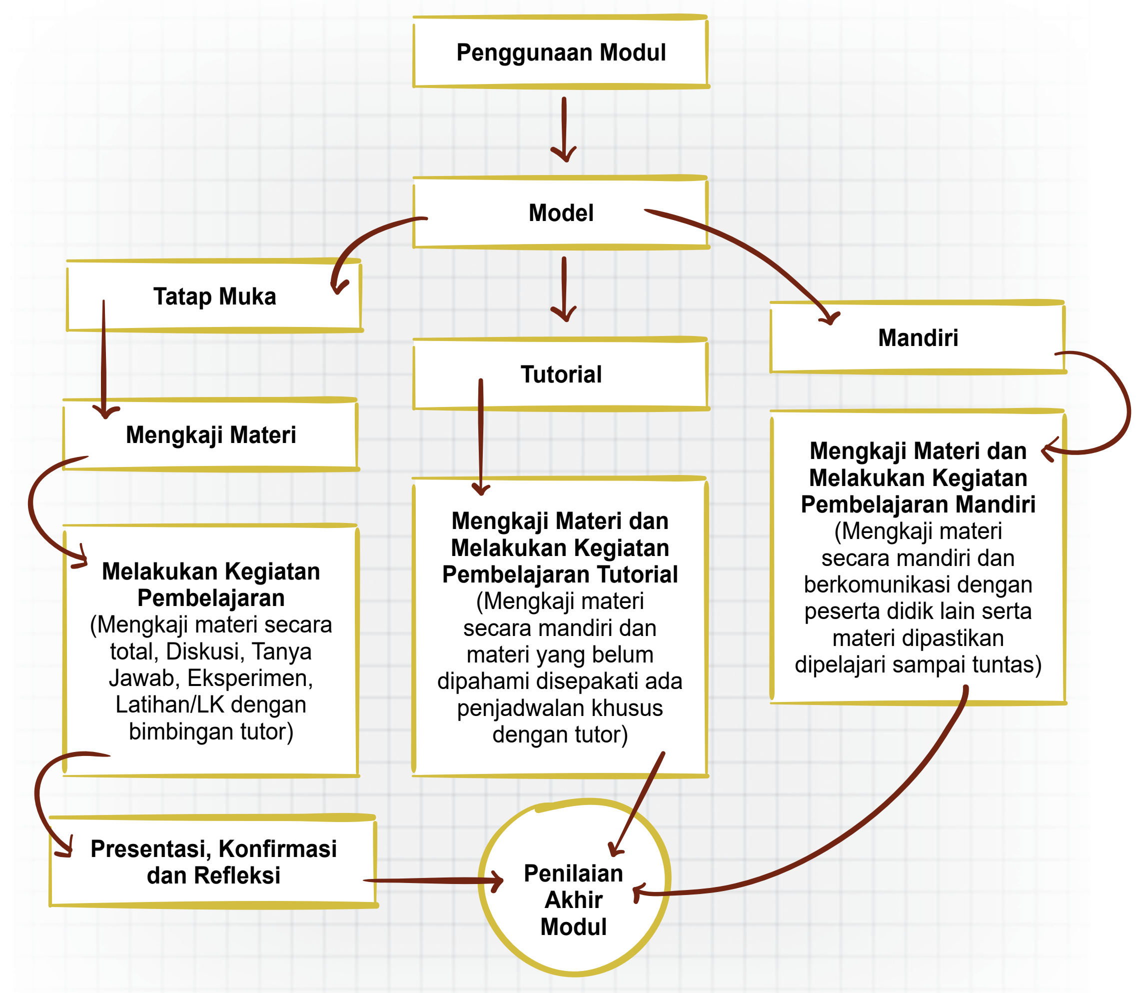
Harris Iskandar

Daftar Isi

TATANAN RUMAH

Petunjuk Penggunaan Modul

Secara umum, petunjuk penggunaan modul pada setiap kegiatan pembelajaran disesuaikan dengan langkah-langkah kegiatan pada setiap penyajian modul. Modul ini dapat digunakan dalam kegiatan pembelajaran oleh peserta didik, baik dilaksanakan dengan model tatap muka, model tutorial, maupun model belajar mandiri. Berikut ini alur petunjuk penggunaan modul secara umum dapat dilihat pada bagian di bawah ini.



Gambar 1.1 Alur Model Kegiatan Pembelajaran

1. **Kegiatan Pembelajaran Tatap Muka**

   Pembelajaran tatap muka merupakan seperangkat tindakan yang dirancang untuk mendukung proses belajar peserta didik secara tatap muka, sedangkan kegiatan tatap muka adalah kegiatan pembelajaran yang di dalamnya terjadi proses interaksi antara peserta didik dan pendidik/tutor. Metode yang sering digunakan dalam kegiatan pembelajaran seperti metode diskusi, Tanya jawab, demonstrasi, eksperimen dan lainnya.

2. Kegiatan Pembelajaran Tutorial

   Pembelajaran turorial yang dimaksud dalam kegiatan ini adalah dimana pembelajaran dilakukan secara mandiri untuk materi-materi yang dapat dengan mudah dipahami oleh peserta didik, sedangkan materi-materi yang dianggap sulit untuk dipahami atau dipelajari maka dilakukan dengan tatap muka. Dalam pembelajaran metode tutorial ini diberikan dengan bantuan tutor. Setelah peserta didik diberikan bahan kajian materi pembelajaran, kemudian peserta didik diminta untuk mempelajari kalian materi yang ada dalam modul. Pada bagian kajian materi yang dirasa sulit, peserta didik dapat bertanya pada tutor.

3. **Kegiatan Pembelajaran Mandiri**

   Kegiatan pembelajaran mandiri merupakan kegiatan pembelajaran yang didorong agar peserta didik mampu menguasai suatu kompetensi guna menyelesaikan suatu permasalahan. Pada kegiatan pembelajarn mandiripeserta didik diberikan kajian materi yang ada dalam modul untuk dipelajari dan diarahkan untuk memegang kendali dalam menemukan dan mengorganisir jawaban yang diharapkan. Penetapan kompetensi sebagai tujuan pembelajaran mandiri dan sampai pada cara pencapaian mulai dari penentuan waktu belajar, tempat belajar, sumber belajar lainnya maupun evaluasi modul dilakukan oleh peserta didik itu sendiri. Pada pembelajaran mandiri dipastikan dengan benar bahwa peserta didik melakukan kajian materi, melakukan tahapan kegiatan pembelajarn, tahapan penugasan/latihan, evaluasi, bahkan sampai pada tahap penilaian dilakukan oleh peserta didik itu sendiri.

Kompetensi Dasar dan Indikator Pencapaian Kompetensi

Tabel 1.1 Kompetensi Dasar dan Indikator Pencapaian Kompetensi

No	Kompetensi Dasar	Indikator Pencapaian Kompetensi
1	3.2 Menjelaskan penggunaan vektor, operasi vektor, panjang vektor, sudut antar vektor dalam ruang berdimensi dua (bidang) dan berdimensi tiga.	3.2.1 Menemukan konsep vektor dan penggunaan vektor dari masalah kontekstual. 3.2.2 Menentukan jumlah, selisih, hasil kali vektor dengan skalar, dan lawan suatu vektor. 3.2.3 Menentukan panjang suatu vektor di bidang dan di ruang. 3.2.4 Menggunakan rumus perbandingan vektor di bidang dan di ruang. 3.2.5 Menentukan hasil kali skalar dua vektor di bidang dan di ruang. 3.2.6 Menentukan sudut antara dua vektor di bidang dan di ruang. 3.2.7 Menentukan vektor proyeksi dan panjang proyeksinya
	4.2 Menyelesaikan masalah kontekstual yang berkaitan dengan vektor, operasi vektor, panjang vektor, sudut antar vektor dalam ruang berdimensi dua (bidang) dan berdimensi tiga dengan menggunakan langkah-langkah/prosedur penyelesaian masalah	4.2.1 Mengidentifikasi masalah kontekstual yang berhubungan dengan vektor dalam ruang berdimensi dua (bidang) serta menyelesaikannya. 4.2.2 Mengidentifikasi masalah kontekstual yang berhubungan dengan vektor dalam ruang berdimensi tiga serta menyelesaikannya.

Tujuan yang Diharapkan Setelah Mempelajari Modul

Tujuan setelah mempelajari modul 2 ini, diharapkan peserta didik memiliki kemampuan pengetahuan, dan ketrampilan tentang :

1. Menemukan dan mengidentifikasi masalah konstektual yang berkaitan dengan konsep vektor, vektor pada bidang (dimensi dua) dan vektor dalam ruang (dimensi tiga) dengan menerapkan pada aktivitas di rumah (perpindahan benda atau orang)
2. Menentukan panjang vektor, jumlah, selisih dan hasil kali vektor dengan skalar serta lawan suatu vektor dengan menghitung berapa satuan suatu benda atau seseorang berpindah tempat.
3. Menjelaskan dan menggunakan sifat-sifat vektor dan perbandingan vektor di bidang dan di ruang.
4. Menentukan sudut antara dua vektor, vektor proyeksi serta panjang proyeksi di bidang dan di ruang.
5. Menjelaskan, melakukan dan menyelesaikan masalah vektor di bidang dan di ruang dalam kehidupan sehari-hari

Pengantar Modul

Pembelajaran merupakan wahana untuk mendapatkan kemampuan baik sikap, pengetahuan dan ketrampilan. Untuk mendukung terciptanya kegiatan pembelajaran baik melalui model tatap muka, tutorial maupun mandiri, maka salah satu alternatifnya adalah dengan modul ini. Materi pada modul 2 ini adalah vector yang meliputi dua materi yaitu vector pada bidang (dua dimensi) dan vector pada ruang (Dimensi tiga).

Materi pada modul 2 ini disajikan dalam tema “Tatanan Rumah” dan di dalamnya terdapat beberapa subtema yang terintegrasi dalam kegiatan pembelajaran. Secara umum materi pembelajaran dalam modul ini membahas yang berkaitan dengan pemahaman konsep vektor pada bidang (dimensi dua) dan vektor dalam ruang (dimensi tiga). Modul ini memberikan gambaran uraian materi dengan penerapan dalam kehidupan sehari-hari atau bersifat konstektual.

Modul 2 dengan tema “Tatanan Rumah” ini terbagi menjadi dua sub tema yang terintegrasi ke dalam unit, yaitu unit 1 dengan sub tema “Fungsi-Fungsi Ruang”, unit 2 dengan sub tema “Menata Ruangan Rumah”. Masing-masing unit memuat tentang uraian materi, penugasan dan soal-soal latihan.

Modul ini dilengkapi dengan contoh-contoh yang terjadi di kehidupan sehari-hari, misalnya yang berkaitan dengan vektor pada bidang (dimensi dua) adalah memindahkan perabot rumah dari ruangan satu ke ruangan yang lain, olah raga memanah, terjun payung, perahu menyeberang sungai, anak yang sedang bermain jungkat-jungkit. Penggunaan vektor dalam ruang (dimensi tiga) misalnya dalam penggunaan desain grafis, dan sebagainya.

Dengan mempelajari modul ini, dimana materi dikaitkan dengan masalah kehidupan sehari-hari, maka diharapkan peserta didik dengan mengkaji, mencermati, mengolah, menjawab permasalahan atau soal-soal latihan dapat memberikan manfaat dalam kehidupan sehari-hari.

Materi disajikan dengan tema dan sub tema yang diintegrasikan dengan permasalahan kehidupan sehari-hari dimaksudkan agar peserta didik lebih tertarik dan memahami bahwa mempelajari vektor sangat penting dan bermanfaat dalam kehidupan sehari-hari. Dengan mempelajari modul ini, sudah barang tentu memberikan gambaran betapa pentingnya belajar, karena dengan belajar, peserta didik mampu menghadapi dan menyelesaikan permasalahan yang dihadapi dalam dunia nyata, sehingga jelas bahwa dengan mempelajari materi vektor memberikan manfaat dalam menjalani kehidupan sehari-hari.

UNIT 1 FUNGSI-FUNGSI RUANG

Pernahkah kalian mendengar atau membaca tentang vektor? Apa itu vektor, dan apa manfaat mempelajarinya? Tanpa disadari, ternyata kalian sering menerapkan vektor dalam kehidupan sehari-hari. Amatilah gambar berikut :

Gambar 1.2 Penggunaan Vektor

Setelah kalian mengamati gambar di atas, apa yang kalian pikirkan tentang suatu vektor? Sudah tentu begitu banyak fungsi vektor dalam kehidupan sehari-hari. Dalam keseharian kita tidak lepas dari yang namanya vektor. Berdasarkan pengamatan dari gambar-gambar diatas, maka kita dapat simpulkan :

1. Saat penerjun payung menjatuhkan diri dari pesawat, tempat ia jatuh tidak tepat di bawah kapal, tetapi jauh melenceng karena adanya gaya vektor
2. Pembuatan gravis pada komputer
3. Anak-anak bermain jungkat-jungkit pada suatu bidang miring, mengakibatkan anak tersebut tidak terlempar dari bidang miring tersebut.

4. Saat pemanah menarik anak panah
5. Saat beraktifitas di rumah seperti perpindahan barang atau orang.

Setelah kalian mengidentifikasi pengggunaan vektor yang ada tentu kita bertanya untuk apa kegunaannya dan kenapa digunakan. Untuk menjawab pertanyaan tersebut, kita ambil misal salah satu penggunaan vektor dalam kehidupan sehari-hari, yang diterapkan pada aktivitas di rumah berupa perpindahan benda atau orang.

Pengertian Vektor dan Skalar

Di SMP/MTs/Paket B kalian pasti telah mengenal tentang dua besaran, yaitu besaran vektor dan besaran skalar. Setiap besaran skalar seperti temperatur, luas, volume, tekanan, massa, volume, tinggi, energy, kalori dan sebagainya selalu dikaitkan dengan suatu bilangan yang merupakan nilai dari besaran itu. Untuk besaran vektor, selain mempunyai nilai, juga mempunyai arah. Misalnya pada gerakan angin, selain disebutkan lajunya juga disebutkan juga arahnya. Lalu, apa bedanya besaran sklalar dan besaran vektor? Untuk lebih mudah memahami dua konsep tersebut, perhatikan ilustrasi berikut.

Rumah sebagai tempat tinggal, biasanya memiliki banyak ruangan yang memiliki fungsi yang berbeda-beda, seperti dapur untuk memasak, ruang makan untuk menikmati hidangan makanan yang dimasak, kamar tidur untuk tempat istirahat, ruang tamu untuk menerima tamu yang berkunjung ke rumah, ruang keluarga untuk tempat berkumpulnya seluruh anggota keluarga dan ruangan-ruangan yang lain. Masing-masing ruang berisi dengan barang-barang yang sesuai dengan tempat dan fungsinya. Misalnya piring dan peralatan makan, pasti idealnya diletakkan di ruang dapur. Tapi seringkali ditemukan masalah ketika kalian mencari sesuatu tetapi tidak ditemukan di tempat yang biasa menyimpan.

Sebagai contoh, suatu ketika Tiara mencari tempat minumnya. Tiara bertanya pada Ibunya, “Bu….dimana tempat minum hello kittyku, aku mau membawanya ke sekolah”. “Di atas meja” ujar Ibu. Karena di rumah tersebut banyak meja, Tiara bingung tempat minumnya berada di meja mana. “Meja yang mana Bu?” Tanya Tiara. “Dari posisi kamu berdiri, terus ke arah barat 5 langkah, kemudian ke timur 3 langkah, nah….pasti kamu bisa temukan,” ujar Ibu.

Dari ilustrasi di atas, seandainya Ibu tidak menunjukkan arah dan jaraknya, pasti Tiara akan kesulitan mencari tempat minumnya bukan? Taukah kalian, kasus tersebut bisa menjelaskan tentang konsep vektor. Akan ada dua pertanyaan yang selalu terkait dengan besaran vektor, yaitu berapa besarnya dan kemana arahnya. Jika kedua pertanyaan itu bisa kalian jawab, maka kalian telah memberikan informasi yang lengkap tentang vektor.

Dari uraian diatas, dapat disimpulkan bahwa :

- Vektor adalah suatu besaran yang mempunyai nilai (besar) dan arah. Suatu vektor dinamai dengan huruf kecil dengan tanda panah di atasnya, misalnya $\vec{a}$, $\vec{b}$ dan $\vec{c}$.
- Skalar adalah suatu besaran yang tidak memiliki arah.

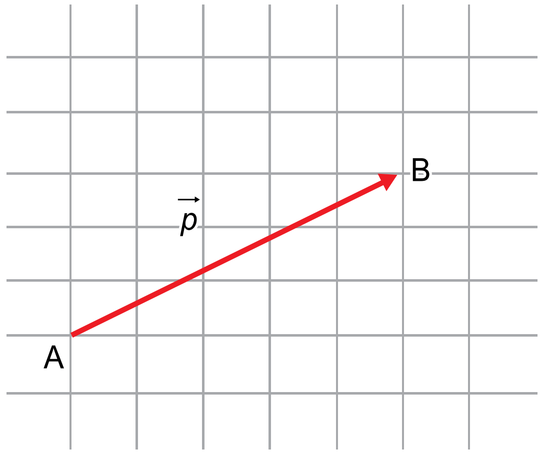
Secara geometris, suatu vektor dapat digambarkan sebagai ruas garis berarah.

Perhatikan gambar 1.3.

Pada gambar tersebut tampak suatu ruas garis berarah $\vec{AB}$. Misalkan ruas garis $\vec{AB}$ disebut sebagai vektor $\vec{p}$. Vektor $\vec{p}$ adalah vektor yang pangkalnya di titik A dan ujungnya di titik B.

Dalam bentuk matriks, vektor $\vec{p}$ dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\vec{p} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} \text{komponen x} \\ \text{komponen y} \end{pmatrix}$$



Gambar 1.3 Vektor

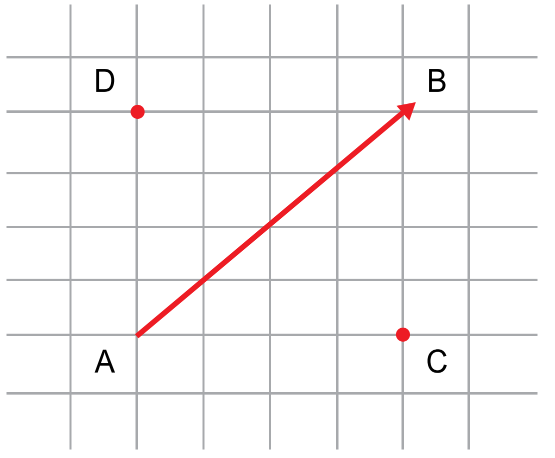
Untuk komponen x, jika arahnya ke kanan maka tandanya positif, jika arahnya ke kiri, berarti tandanya negatif. Untuk komponen y jika arahnya ke atas, berarti tandanya positif, jika arahnya ke bawah maka tandanya negatif.

Nah, sekarang bagaimana cara menyatakan vektor dalam bentuk matrik?

Kita dapat menyatakan matrik dengan dua cara, yaitu :

1. Dari gambar 1.3. Vektor $\vec{AB}$ dinyatakan dengan menyebutkan panjang dari A ke C dilanjutkan dengan panjang C ke B. Panjang A ke C adalah 4 satuan dengan arah ke kanan, berarti merupakan komponen x dengan tanda positif. Adapun C ke B adalah 5 satuan dengan arah ke atas, berarti merupakan komponen y dengan tanda positif. Maka, jika ditulis dalam bentuk matrik adalah :

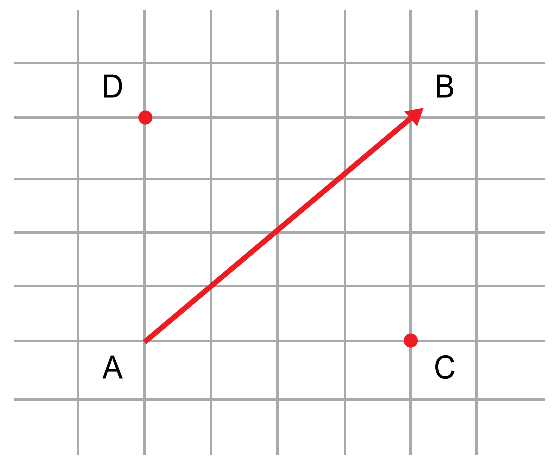
$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} \text{komponen x} \\ \text{komponen y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$



Gambar 1.4 Vektor

2. Dari gambar 1.3. Vektor $\vec{AB}$ dinyatakan dengan menyebutkan panjang dari A ke D dilanjutkan dengan panjang D ke B. Panjang A ke D adalah 5 satuan dengan arah ke kanan, berarti merupakan komponen y dengan tanda positif. Adapun D ke B adalah 4 satuan dengan arah ke atas, berarti merupakan komponen x dengan tanda positif. Maka, jika ditulis dalam bentuk matrik adalah :

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} \text{komponen x} \\ \text{komponen y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$



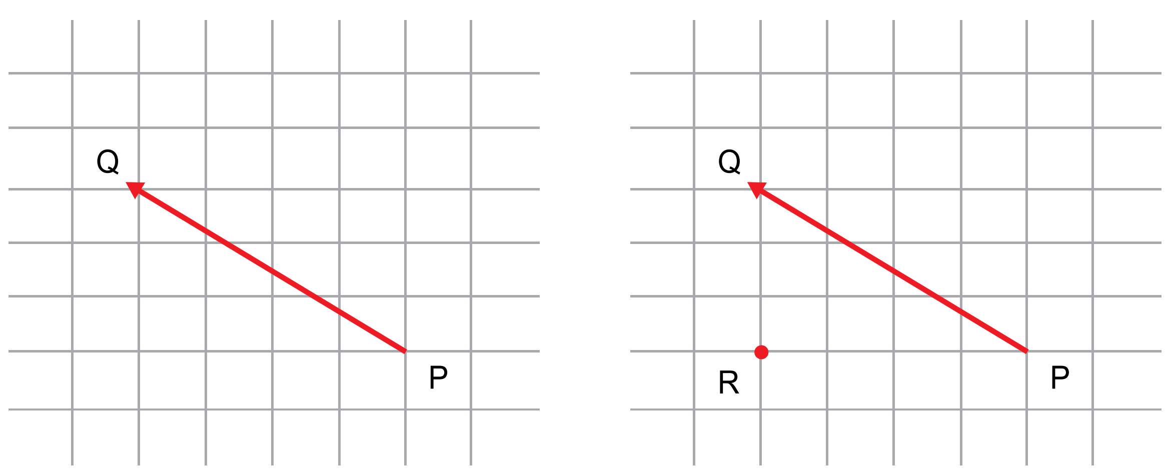
Gambar 1.5 Vektor

Penyajian seperti di atas dinamakan penyajian vektor dalam bentuk matrik kolom atau sering disebut vektor kolom.

Dari kedua cara menyajikan vektor tersebut, tambak bahwa hasil yang diperoleh adalah sama, yaitu $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Contoh Soal:

Nyatakan vektor $\vec{PQ}$ berikut dalam bentuk matrik kolom!



(a) *Gambar 1.6 Vektor* (b)

Jawab:

Misalkan dari gambar 1.5 tersebut kita tempatkan titik R seperti tampak pada gambar 1.5 (b). $\vec{PQ}$ vektor dari P ke R dilanjutkan dari R ke Q. Dari P ke R melangkah 4 satuan ke kiri sehingga merupakan komponen x dengan tanda negatif atau ditulis -4. Sedangkan dari R ke Q melangkah 3 satuan ke atas, sehingga merupakan komponen y dengan tanda positif atau ditulis 3.

Maka, vektor $\vec{PQ}$ jika dinyatakan dalam bentuk vektor kolom adalah $\vec{PQ} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Panjang Vektor

Panjang sebuah vektor adalah jarak dari titik pangkal ke titik ujung vektornya. Karena secara aljabar, baik pada bidang datar maupun dalam bidang, titik pangkal dan titik ujung vektor adalah dalam bentuk koordinat, maka panjang vektor dapat ditentukan dengan menggunakan rumus jarak dua titik.

Misalnya, ada titik A (x_1, y_2) dan B (x_2, y_2), maka jarak titik A ke titik B dapat ditentukan dengan rumus jarak $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Karena panjang vektor dapat ditentukan dengan menggunakan rumus jarak, maka panjang vektor $\vec{AB}$ akan sama dengan panjang vektor $\vec{BA}$. Panjang vektor $\vec{AB}$ dilambangkan dengan $|\vec{AB}|$. Jika vektor $\vec{AB}$ dimisalkan $\vec{a}$, maka Besar atau panjang vektor $\vec{a}$, dinotasikan dengan $|\vec{a}|$.

Ingatkah kalian tentang teorema (dalil) Pythagoras? Teorema (dalil) Pythagoras digunakan untuk mencari panjang sisi-sisi pada segitiga siku-siku (sudut 90o). Ternyata rumus untuk menentukan panjang atau jarak dua titik seperti yang dijelaskan di atas, sama dengan rumus menentukan sisi miring pada segitiga siku-siku.

Dari uraian tersebut, dapat disimpulkan bahwa untuk menentukan panjang atau besar suatu vektor pada bidang (dimensi dua) dapat dilakukan dengan menggunakan teorema (dalil) Pythagoras. Panjang vektor $\vec{r}$ dinyatakan dengan :

$$|\vec{r}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + y^2}$$

Contoh Soal:

Diketahui vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Tentukan :

1. $|\vec{a}|$
2. $|\vec{b}|$
3. $|\vec{a} + \vec{b}|$

Jawab:

1. $|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2)} = \sqrt{(9+16)} = \sqrt{25} = 5$ satuan panjang
2. $|\vec{b}| = \sqrt{(2^2 + 5^2)} = \sqrt{(4 + 25)} = \sqrt{34}$ satuan panjang

3. Dicari dulu $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$

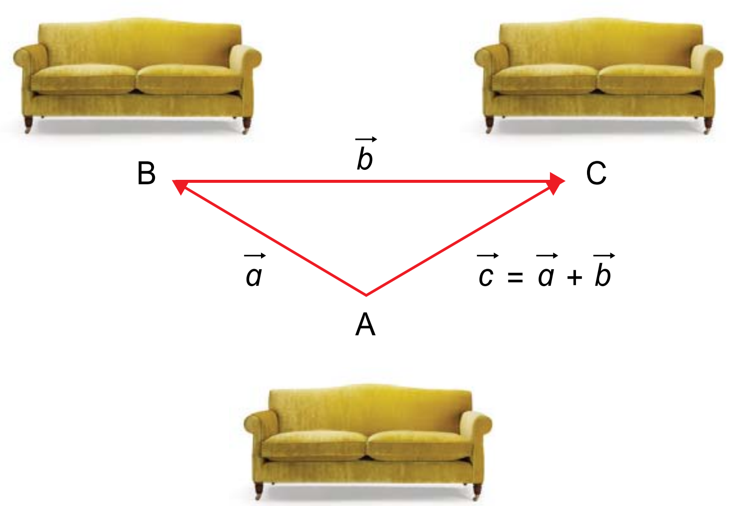
$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 7^2)} = \sqrt{(1 + 49)} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

Operasi Aljabar pada Vektor

Sebagaimana bilangan, pada vektor juga berlaku operasi aljabar, seperti penjumlahan, pengurangan.

1. Penjumlahan Vektor

Perhatikan ilustrasi berikut!



Gambar 1.7 Ilustrasi sofa yang berpindah tempat

Keluarga Hartono setiap dua bulan sekali selalu menata ulang ruang tamunya. Namun, keluarga Hartono selalu saja tidak merencanakan atau menyiapkan desainnya terlebih dahulu. Sehingga saat penataan ruangan tersebut sering kehabisan tenaga karena harus menggeser atau memindah-mindah sofa yang ada. Misalnya, dari titik A sofa dipindah ke titik B, kemudian dipindah lagi ke titik C. Posisi sofa sekarang adalah di titik C. Maka vektor $\overrightarrow{AC}$ diperoleh dari penjumlahan antara vektor $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{BC}$.

Dengan kata lain,vektor $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ dan $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, maka vektor $\vec{c}$ diperoleh dari penjumlahan antara vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$, ditulis $\boldsymbol{\vec{c}} = \boldsymbol{\vec{a}} + \boldsymbol{\vec{b}}$

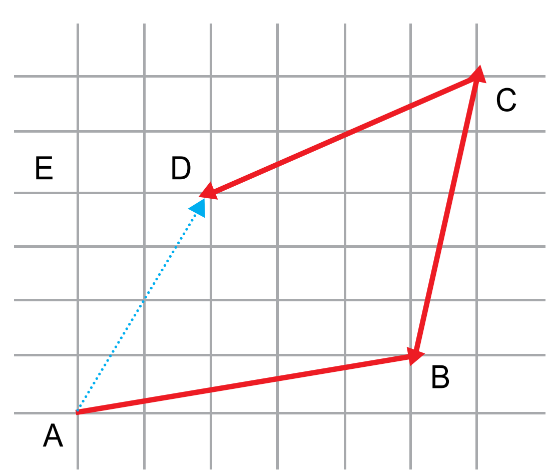
Perhatikan gambar 1.8 berikut ini!

Tentukan vektor-vektor berikut dalam bentuk matrik!

a. $\overrightarrow{AD}$

b. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

c. Apa kesimpulanmu mengenai hasil a dan b?



Gambar 1.8 Vektor

Jawab:

a. Dari gambar diperoleh bahwa :

$\overrightarrow{AD}$ = vektor dari $\underbrace{\text{A ke E}}_{\substack{\text{4 ke atas (+4)}\\\text{Komponen y}}}$ dilanjutkan dari $\underbrace{\text{E ke D}}_{\substack{\text{2 ke kanan (+2)}\\\text{komponen x}}}$

Jadi, diperoleh $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

b. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}5 + 1 - 4\\1 + 5 - 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$$

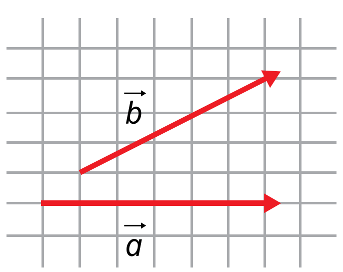
c. Dari hasil a dan b, diperoleh hasil yang sama, yaitu $\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$

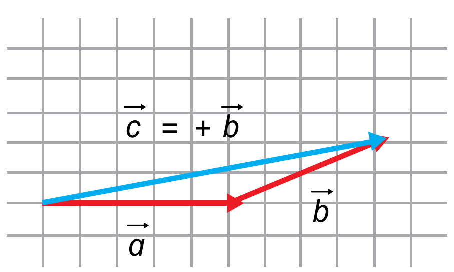
Uraian di atas merupakan contoh menentukan hasil jumlah vektor dengan menjumlahkan komponen-komponennya. Secara umum, penjumlahan vektor dapat dijelaskan sebagai berikut.

Misalnya, diketahui dua vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ seperti gambar 1.6 disamping. Bagaimana cara menentukan resultannya?

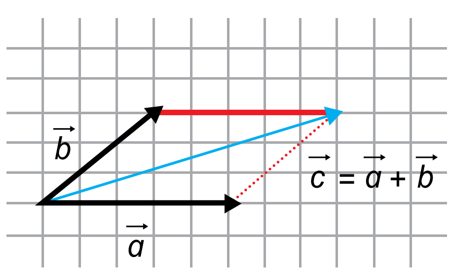
Penjumlahan vektor dapat diperoleh dengan dua cara, yaitu :



Gambar 1.9 Vektor



Gambar 1.10 Penjumlahan Vektor



Gambar 1.10 Penjumlahan Vektor

a. Aturan segitiga

Untuk mengetahui cara menentukan hasil penjumlahan dua vektor atau resultan, kalian perhatikan gambar 1.8 di samping. Ikuti langkah-langkah berikut :

- ✓ Himpitkan titik ujung vektor $\vec{a}$ dengan titik pangkat vektor $\vec{b}$, dengan tanpa merubah besar dan arahnya.
- ✓ Tarik vektor $\vec{c}$, yaitu vektor yang titik pangkalnya berhimpit dengan titik pangkal vektor $\vec{a}$ dan titik ujungnya berhimpit dengan titik ujung vektor $\vec{b}$.

b. **Aturan jajargenjang**

Untuk mengetahui cara menentukan hasil penjumlahan dua vektor atau resultan, kalian perhatikan gambar 1.9 di samping. Ikuti langkah-langkah berikut :

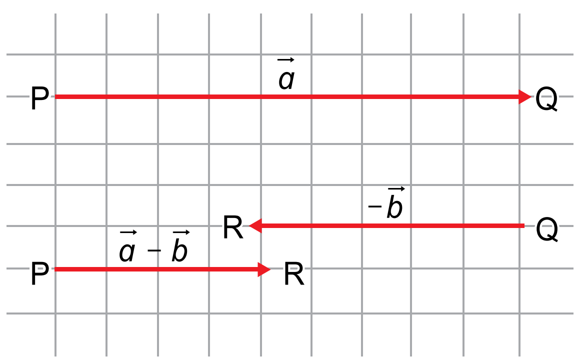
- ✓ Geser vektor $\vec{b}$ sehingga titik pangkal $\vec{b}$ berhimpit atau bertemu dengan titik pangkal $\vec{a}$ dengan tidak merubah besar dan arah vektor.
- ✓ Buat jajar genjang semu yang dibentuk oleh vektor $\vec{a}$ dan vektor $\vec{b}$ (lihat gambar 1.8)
- ✓ Vektor $\vec{c}$ adalah vektor yang berhimpit dengan diagonal utama jajargenjang tersebut.

2. Pengurangan Vektor

Pengurangan vektor $\vec{b}$ dari vektor $\vec{a}$ dinyatakan sebagai $\vec{a} - \vec{b}$.

Operasi ini sama dengan penjumlahan vektor $\vec{a}$ dengan vektor $\vec{b}$, yaitu :

a. Jika $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ searah



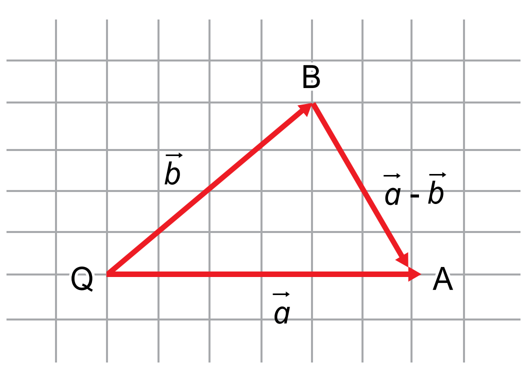
Gambar 1.12 Pengurangan Vektor

Misalkan $\vec{PQ} = \vec{a}$, $\vec{RQ} = -\vec{b}$ maka :

$$\begin{aligned} \vec{a} - \vec{b} &= \vec{a} + (-\vec{b}) \\ &= \vec{PQ} + (-\vec{RQ}) \\ &= \vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR} \end{aligned}$$

Jadi, $\vec{PR} = \vec{a} - \vec{b}$

b. Jika $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ tidak searah



Gambar 1.13 Pengurangan Vektor

Misalkan $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = -\vec{b}$ maka :

$$\begin{aligned} \vec{a} - \vec{b} &= \vec{a} + (-\vec{b}) \\ &= \vec{OA} + (-\vec{OB}) \\ &= \vec{BO} + \vec{OA} = \vec{BA} \end{aligned}$$

Jadi, $\vec{BA} = \vec{a} - \vec{b}$

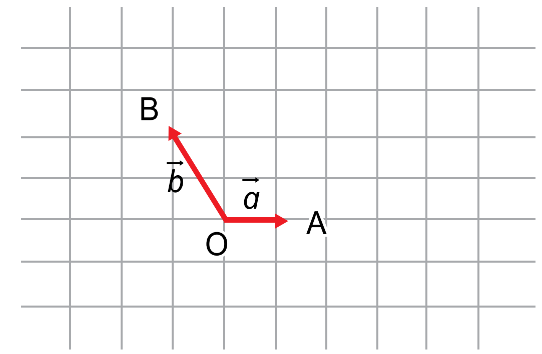
Sekarang, kalian sudah jelas bukan, pada vektor juga berlaku operasi aljabar seperti penjumlahan dan pengurangan. Hasil penjumlahan dua vektor disebut resultan.

Misalkan, vektor $\vec{a}$ adalah lawan vektor $\vec{p}$ maka vektor $\vec{a}$ memiliki panjang atau besar yang sama dengan vektor $\vec{p}$, ditulis $|\vec{a}| = |\vec{p}|$, akan tetapi vektor $\vec{p}$ memiliki arah yang berlawanan dengan vektor $\vec{a}$, yang dapat dituliskan dengan $\vec{a} = -\vec{p}$.

Lawan vektor $\vec{a}$ adalah $-\vec{a}$ Jika arahnya berlawanan tetapi besarnya sama

Contoh Soal :

Perhatikan gambar berikut!

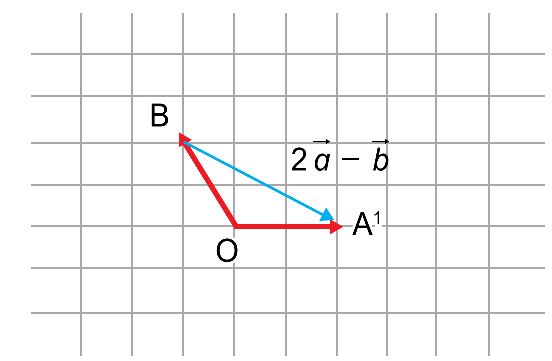


Jika $\vec{OA} = \vec{a}$ dan $\vec{OB} = \vec{b}$, gambar dan tentukan :

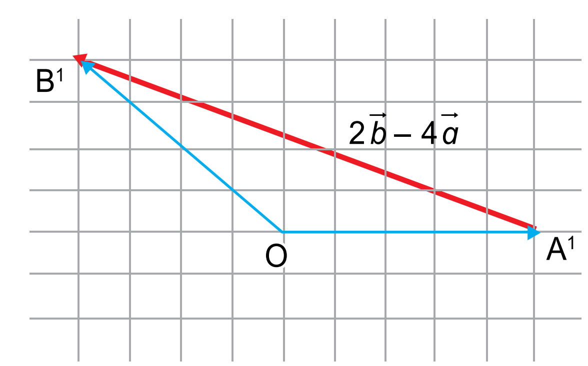
1. $2\vec{a} - \vec{b}$
2. $2\vec{b} - 4\vec{a}$

Jawab :

1. $$\begin{aligned} 2\vec{a} - \vec{b} &= 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+2\\0-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix} \end{aligned}$$



2. $$\begin{aligned} 2\vec{b} - 4\vec{a} &= 2\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-4-4\\4-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\4\end{pmatrix} \end{aligned}$$



3. Perkalian Vektor dengan Skalar

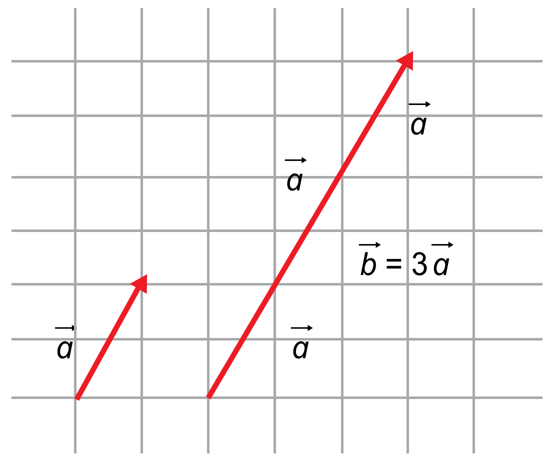
Di atas telah diuraikan bahwa pada vektor juga berlaku operasi aljabar. Sebelumnya telah disampaikan tentang penjumlahan, pengurangan, lawan pada vektor, nah sekarang kita lanjutkan dengan perkalian vektor.

Perhatikan gambar di samping. Vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ jika ditulis dalam vektor kolom menjadi

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Berdasar sifat perkalian matriks dengan skalar (bilangan real) maka :

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\,\vec{a}$



Gambar 1.14 Perkalian Vektor dengan skalar

Dari uraian tersebut, dapat disimpulkan bahwa :

Secara umum, misalkan $\vec{a}$ adalah vektor dan m adalah bilangan real (skalar), maka perkalian vektor $\vec{a}$ dengan bilangan real m adalah sebuah vektor $\vec{b}$ dengan $\vec{b} = m\vec{a}$, dengan syarat :

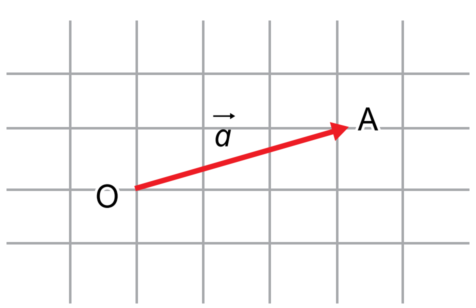
Perkalian vektor dengan bilangan real (skalar) : Suatu vektor $\vec{a}$ dikalikan dengan skalar m maka hasilnya $m\vec{a}$

Jika m > 0 (positif) maka $\vec{a}$ dan $m\vec{a}$ mempunyai arah yang sama (searah)

Jika m < 0 (negatif) maka $\vec{a}$ dan $m\vec{a}$ mempunyai arah yang berlawanan arah.

Contoh:

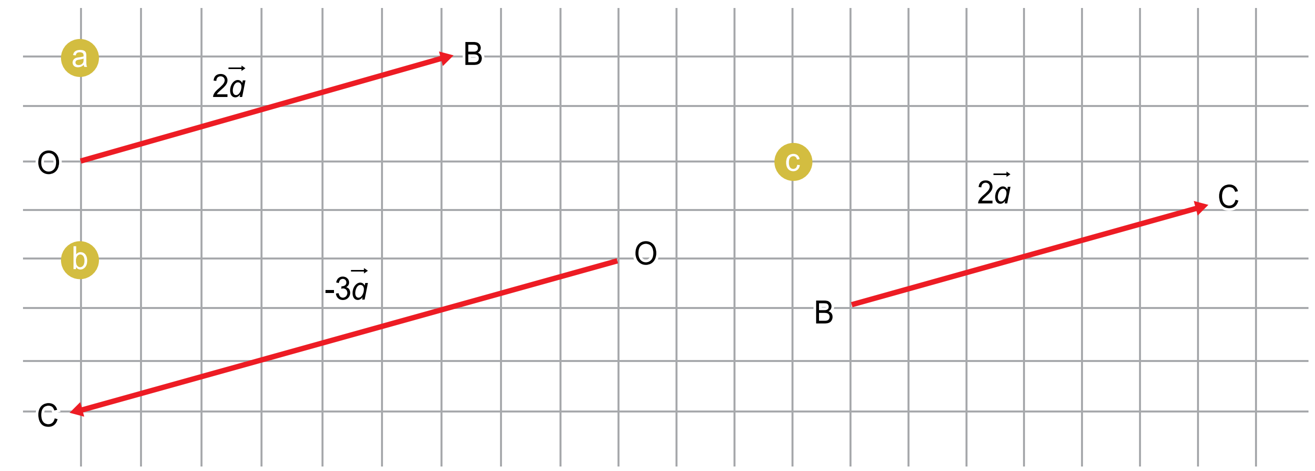
Diketahui vektor berikut :



Gambarlah tiap vektor berikut 1

1. $\vec{OB} = 2\vec{a}$
2. $\vec{OC} = -3\vec{a}$
3. $2\vec{BC} = 4\vec{OA}$

Jawab:



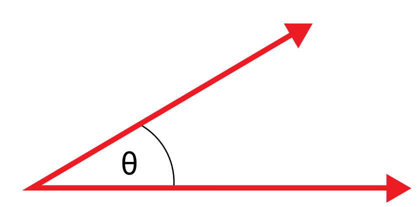
1. $\vec{OB}$ dan $2\vec{a}$ mempunyai arah yang sama dan $|\vec{OB}| = 2|\vec{a}|$
2. $\vec{OC}$ dan $\vec{a}$ berlawanan arah, tetapo $|\vec{OC}| = 3|\vec{a}|$
3. $2\vec{BC} = 4\vec{OA}$ dengan kata lain $\vec{BC} = \frac{4}{2}\vec{OA} = 2\vec{OA}$

Sehingga $\vec{BC}$ dan $\vec{OA}$ mempunyai arah yang sama dan besar $|\vec{BC}| = 2|\vec{OA}|$

Untuk lebih memahami tentang perkalian pada vektor, perhatikan uraian materi tentang perkalian skalar dua vektor pada bidang berikut.

Jika diketahui dua vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ yang membentuk sudut θ, seperti gambar 1.12. Perkalian skalar (dot product) dari vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ dinotasikan dengan $\vec{a} \bullet \vec{b}$, didefinisikan sebagai berikut :

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$$



Gambar 1.15 Dua Vektor yang membentuk sudut

$\vec{a} \bullet \vec{b}$ dibaca : vektor $\vec{a}$ dot vektor $\vec{b}$ dan θ adalah sudut lancip yang dibentuk oleh dua vektor.

Jika $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ maka perkalian skalar $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ dapat dicari dengan rumus :

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_1\,x_2 + y_1\,y_2$$

Contoh:

1. Diketahui vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ hitunglah nilai $\vec{a} \cdot \vec{b}$

   Jawab:

   $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = (-3)\,(-1) + 2.4 = 3 + 8 = 11$

2. Diketahui : vektor $\vec{p} = 5\hat{i} + \hat{j}$ dan $\vec{q} = 2m\hat{i} - \hat{j}$. Jika kedua vektor tersebut membentuk sudut 90o maka tentukan nilai m.

   Jawab:

   Gunakan rumus $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos \theta$

   Diperoleh $\cos \theta = \dfrac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}|\,|\vec{q}|}$

   Kita ketahui bahwa nilai cos 90° = 0, maka diperoleh

   $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$ maka $5.2m + 1.(-1) = 0$

   $$10m - 1 = 0$$

   $$10m = 1$$

   $$m = \frac{1}{10}$$

Penggunaan Vektor pada Bidang

1. Vektor Posisi

Pada uraian materi di atas, telah disampaikan bahwa vektor sangat penting dalam kehidupan manusia, dan setiap hari kita menerapkannya dalam kehidupan sehari-hari. Setiap kali kalian memindahkan barang dari satu tempat ke tempat yang lain, itu berarti kalian sudah menerapkan vektor, yaitu vektor pada bidang (dimensi dua). Pembahasan tentang vektor pada bidang kita awali dengan pembahasan vektor posisi.

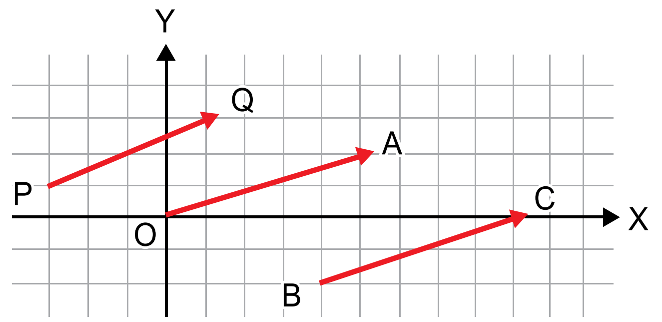
Vektor posisi suatu titik adalah suatu vektor yang pangkalnya di titik pangkal koordinat dan ujungnya di titik itu.

Perhatikan gambar 1.16 berikut!

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Dari ketiga vektor tersebut, manakah yang merupakan vektor posisi? Ingat, vektor posisi adalah vektor yang titik pangkalnya berada di pangkal koordinat (0,0).

Berdasar pengertian tersebut, yang merupakan vektor posisi adalah hanya $\overrightarrow{OA}$.



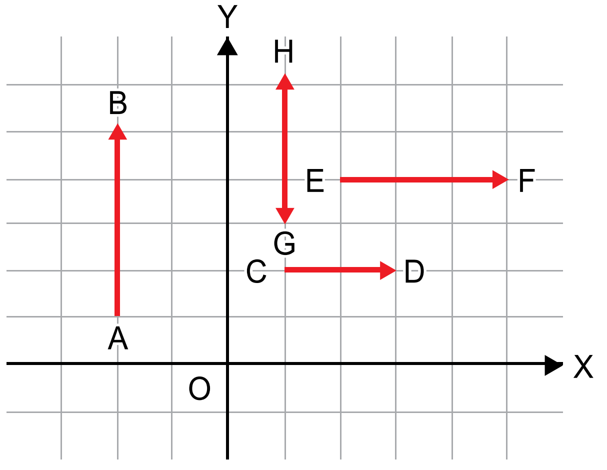
Gambar 1.16 Vektor pada bidang (dimensi dua)

Misalnya, Vektor posisi titik A(3,-2) adalah $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Secara umum, vektor posisi sebuah titik P (x, y) adalah : $\vec{p} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

2. Vektor Satuan pada Bidang

Amatilah gambar 1.17 berikut :



Gambar 1.17 Vektor yang sejajar sumbu X dan Y

Pada gambar 1.17 ditunjukkan vektor-vektor yang sejajar sumbu X dan sumbu Y.

Vektor yang sejajar sumbu X :

$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Vektor yang sejajar sumbu Y

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ dan $\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Komponen vektor-vektor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ dan $\overrightarrow{GH}$ dapat dinyatakan sebagai perkalian suatu skalar dengan vektor, yaitu :

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ dan } \overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dan } \overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vektor $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ disebut vektor satuan, vektor satuan pada sumbu X adalah $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ dan vektor satuan pada sumbu Y adalah $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Jadi, Vektor satuan adalah vektor yang besarnya satu satuan.

Vektor satuan digunakan sebagai dasar pembentukan semua vektor.

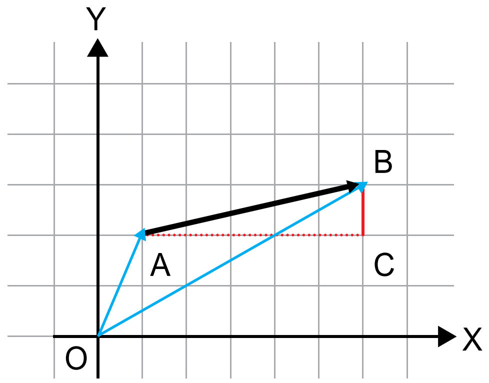
- Vektor satuan pada sumbu X dilambangkan sebagai $\vec{i} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ dengan $|\vec{i}|=1$ satuan.
- Vektor satuan pada sumbu Y dilambangkan sebagai $\vec{j} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ dengan $|\vec{j}|=1$ satuan.
- Setiap vektor dapat dinyatakan sebagai vektor posisi $a\hat{i} + b\hat{j}$.

Contoh:

1. Vektor posisi titik P(3,5) dapat ditulis dalam bentuk : $\vec{p} = \vec{OP} = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$
   $\vec{p} = \vec{OP} = 3\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 3\hat{i} + 5\hat{j}$
2. Misalkan titik A (-2,-6) dapat ditulis dalam bentuk : $\vec{a} = \vec{OA} = \begin{pmatrix}-2\\-6\end{pmatrix}$
   $\vec{a} = \vec{OA} = -2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -2\hat{i} - 6\hat{j}$

Secara umum, jika koordinat titik A (x, y) maka vektor posisi titik A adalah $\vec{OA} = \vec{a}$ dapat dinyatakan sebagai $\vec{a} = x\hat{i} + y\hat{j}$ atau $\vec{a} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

Perhatikan gambar 1.18 berikut :



Gambar 1.18 Vektor

Perhatikan gambar 1.18 disamping:

Diketahui vektor $\vec{AB} = \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$

Jika vektor $\vec{AB}$ dinyatakan sebagai pengurangan dua vektor, maka hubungan titik A dan B dengan titik pangkal O adalah :

Vektor posisi titik A yaitu $\vec{OA} = \vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

maka A (1, 2)

Vektor posisi titik B yaitu $\vec{OB} = \vec{a} = \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}$

maka B (7, 3)

Perhatikan segitiga OAB :

$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$

$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$

Jadi, $\vec{AB} = \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix} = 6\hat{i} + 1\hat{j}$

Panjang vektor $\vec{AB}$:

Dalam segitiga ACB pada gambar di atas, dapat diperoleh :

Vektor $\vec{AC}$ dapat diperoleh dari vektor posisi titik C dikurangi vektor posisi titik A. Secara umum, misalkan A (x_1, y_1) dan C (x_2, y_2), maka vektor posisi titik A adalah $\vec{a} = \begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j}$ dan vektor posisi titik C adalah $\vec{c} = \begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j}$, sehingga :

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix}x_2 - x_1\\y_2 - y_1\end{pmatrix} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}$$

3. SIfat-sifat Aljabar Vektor pada Bidang

Berikut adalah sifat aljabar vektor pada bidang (dimensi dua) :

Sifat-sifat vektor pada bidang dimensi dua

(1) Jika $\vec{a} = \vec{b}$ maka $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$

(2) Jika $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ maka $\vec{c} = \begin{pmatrix}x_1 - x_2\\y_1 - y_2\end{pmatrix}$

(3) Jika $\vec{p} = m\vec{a}$ maka $\vec{p} = \begin{pmatrix}mx_1\\my_1\end{pmatrix}$

(4) Lawan dari vektor $\vec{a}$ adalah $-\vec{a} = \begin{pmatrix}-x_1\\-y_1\end{pmatrix}$

(5) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

(6) $(\vec{a} + \vec{a}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

(7) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ (identitas penjumlahan)

(8) $1\vec{a} = \vec{a}1 = \vec{a}$

(9) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$

(10) $(m+n)\vec{c} = m\vec{c} + n\vec{c}$

(11) $(mn)\vec{c} = m(n\vec{c})$

(12) $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$

Materi sebelumnya telah dijelaskan tentang vektor satuan, yang cara penulisannya dengan diberikan topi ($\hat{i}$ dan $\hat{j}$). Disebut vektor satuan jika vektor ini memiliki besar atau panjang 1 satuan. Rumus menentukan vektor satuan : $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Vektor satuan pada bidang dimensi dua

Contoh Soal:

Diketahui vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

1. Tentukan vektor satuan dari $\vec{a}$
2. Tunjukkan bahwa panjang vektor satuan $\vec{a}$ adalah 1

Jawab:

1. Misalkan aˆadalah vektor satuan dari $\vec{a}$ maka $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

   $|\vec{a}| = \sqrt{(3^2 + 4^2)} = \sqrt{(9 + 16)} = \sqrt{25} = 5$

   $$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}{5} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

2. $|\hat{a}| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{5}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{25}\right) + \left(\frac{16}{25}\right)} = \sqrt{\left(\frac{25}{25}\right)} = \sqrt{1} = 1$

   Jadi, terbukti bahwa panjang vektor satuan $\vec{a}$ adalah 1

PENUGASAN

Pada unit 1. “Fungsi-fungsi Ruang”, meliputi beberapa kajian materi meliputi :

Tujuan:

Pada pembelajaran ini memiliki tujuan penugasan agar peserta didik dapat :

1. Menggambarkan suatu ilustrasi ke dalam vektor serta dapat menentukan panjang jarak dan perpindahan.
2. Memahami sifat-sifat operasi aljabar pada vektor.

Alat dan bahan yang digunakan: Penggaris, alat tulis.

Langkah-langkah Kegiatan:

a. Kegiatan 1.1. Menggambar Ilustrasi suatu Kejadian
   Untuk dapat memahami dan mengambarkan ilustrasi suatu kejadian, kaji permasalahan berikut ini.

Masalah 1.1:

Menggambar Ilustrasi

Liburan semester yang akan datang, Anton ingin sekali bertemu dengan teman lamanya waktu SMP dulu yang bernama Sinta. Anton dan Sinta berencana bertemu di Taman Kota yang tidak jauh dari rumah Sinta. Tapi sayangnya, Anton tidak tahu dimana tepatnya taman kota tersebut. Kemudian Sinta menjelaskan arah ke taman kota. “Kamu berangkat dari mana, Ton?” ujar Sinta. “Nanti saya naik bis dan turun di terminal bis, jadi kamu kasih petunjuknya dimulai dari terminal bis saja ya…,” ujar Anton.

“Oh ya, tidak jauh kok dari terminal bis. Dari terminal bis kamu jalan saja ke arah utara sejauh 20 m, kemudian ke timur 13 m, kemudian ke arah selatan 10 m. Nah….nanti aku menunggu kamu di situ," ujar Sinta.

Dari ilustrasi di atas, tentukan :

1. Gambar ilustrasi perjalanan Anton dari terminal bis ke taman kota
2. Berapa jarak yang ditempuh Anton untuk sampai ke taman kota?
3. Berapa perpindahannya?

Alternatif Jawaban:

Langkah-langkah mengerjakan

Berikut langkah-langkah yang dapat kalian lakukan untuk menyelesaikan pertanyaan di atas :

1. Tentukan satu titik awal untuk memulai menggambar vektor (terminal bis), beri nama, misalnya titik A.
2. Dari titik awal, titik A dilanjutkan menggambar vektor yang lain sesuai dengan arah dan panjang vektor, dan berilah nama.
3. Setelah selesai menggambar, bisa langsung dihitung jarak dan perpindahannya.

b. Kegiatan 1.2. Memahami sifat-sifat operasi aljabar pada vektor
   Untuk dapat memahami sifat-sifat aljabar pada vektor, kaji permasalahan berikut ini.

Masalah 1.2:

Sifat-sifat Operasi Aljabar pada Vektor

Dengan memisalkan vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ dan $\vec{c} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix}$

Coba kalian buktikan, bahwa sifat-sifat vektor diatas adalah benar!

Misalkan $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$, tentukan : $5\vec{a}$ dan $-2\vec{a}$

Diketahui vektor-vektor sebagai berikut : $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, dan $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$. Hitunglah panjang vektor berikut :

a. $\vec{a}$, $\vec{b}$ dan c
b. $2\vec{a} - \vec{c}$
c. $\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}$

Alternatif Jawaban:

Langkah Mengerjakan

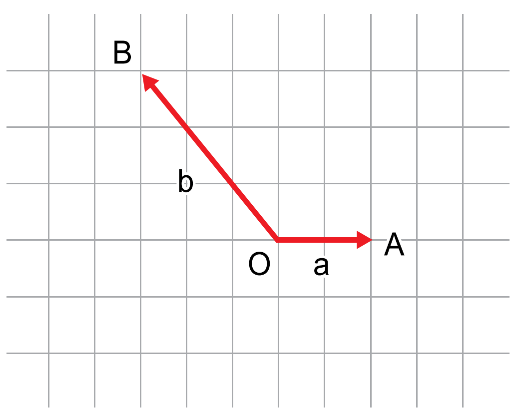
Cermati uraian materi dan contoh-contoh soal yang ada,

kemudian buktikan satu per satu sesuai dengan yang dicontohkan.

LATIHAN

Jawablah pertanyaan berikut dengan benar!

1. Sebuah almari bergerak sejauh 4 m ke arah timur, kemudian ke arah utara sejauh 3 m.
   a. Gunakan skala yang tepat untuk melukis perjalanan almari tersebut
   b. Tentukan panjang dan arah resultan vektor
2. Diketahui $\vec{OA} = \vec{a}$ dan $\vec{OB} = \vec{b}$ seperti gambar berikut.



Tentukan kedudukan titik C jika :

a. $\vec{OC} = 2\vec{a} + \vec{b}$
b. $\vec{OC} = 3\vec{a} + -2\vec{b}$

3. Diketahui $\vec{a} = 3\hat{i} - \hat{j}$ dan $\vec{b} = 2\hat{i} + 13\hat{j}$ dan $\vec{c} = -2\hat{i} - 8\hat{j}$. Tentukanlah :
   a. $\vec{a} + \vec{b}$ dan $|\vec{a} + \vec{b}|$
   b. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ dan $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$
4. Diketahui titik O titik pangkal, dan titik-titik A, B dan C dengan vektor posisi $\vec{OA} = 9\hat{i} - 10\hat{j}$, $\vec{OB} = 4\hat{i} + 2\hat{j}$ dan $\vec{OC} = m\hat{i} - 2\hat{j}$.
   a. Tentukan vektor satuan yang searah $\vec{AB}$
   b. Tentukan nilai m agar A, B dan C segaris

UNIT 2 MENATA RUANGAN RUMAH

Pentingnya mempelajari vektor dan bagaimana penerapannya dalam kehidupan sehari-hari telah diuraikan di unit sebelumnya. Tentu kalian masih ingat bukan, bahwa kegiatan kita memindahkan sesuatu dari satu titik ke titik yang lain itu adalah vektor. Sebelumnya telah dibahas mengenai penerapan vektor pada bidang (dimensi dua). Nah, sekarang akan kita bahas lebih mendalam tentang bagaimana penerapan vektor di dalam ruang (dimensi tiga)?

Gambar 2.1 Desain rumah

Sebuah keluarga atau seseorang yang menempati rumah baru, pasti mencoba-coba menata atau mendesain ruangan rumahnya sebagus dan sehemat mungkin. Adakalanya penghuni rumah merasa bosan dengan tatanan rumahnya, sehingga perlu menata atau mendesain kembali tatanan rumah dengan nuansa atau model baru meskipun dengan perabot yang sama.

Untuk membantu mendesain rumah bisa kalian gunakan aplikasi dalam komputer. Aplikasi ini sangat membantu kalian untuk mendesain rumah dan tata ruangnya apalagi jika kalian suka berganti-ganti furniture, sehingga tidak terlalu banyak membutuhkan tenaga karena harus sering memindah-mindah perabot yang cukup berat. Dengan desain ruangan tiga dimensi, kalian akan lebih mudah melihat dan memvisualkan ruangan yang dirancang sesuai dengan bentuk aslinya. Dengan demikian, belajar vektor dalam ruang sangatlah penting, baik untuk keperluan pekerjaan maupun kepentingan pribadi, seperti menata atau mendesain rumah beserta ruangannya.

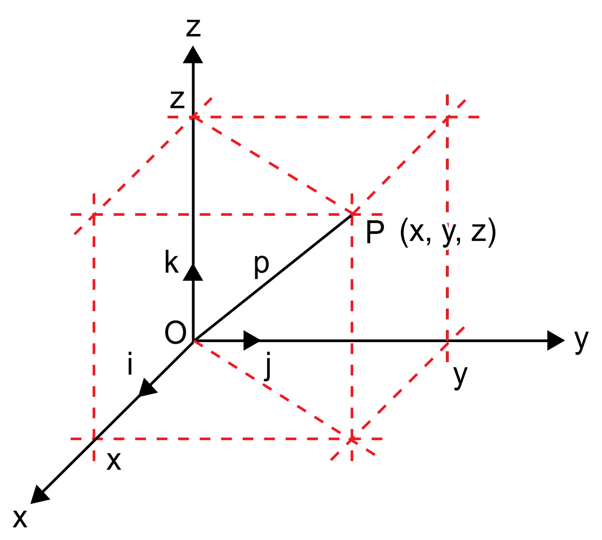
Yuk.... sekarang kita pelajari lebih mendalam tentang vektor dalam ruangan atau dalam matematika sering disebut vektor dimensi tiga.

Pengertian Vektor dalam Ruang (Dimensi Tiga)

Vektor dimensi tiga adalah vektor yang memiliki 3 buah sumbu yaitu X, Y dan Z yang saling tegak lurus dan perpotongan ketiga sumbu sebagai pangkal perhitungan

Vektor p pada bangun ruang dapat dituliskan dalam bentuk :

1. Koordinat kartesius p = (x, y, z)



Gambar 2.2 Vektor dalam ruang

2. Vektor kolom $p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ atau, vektor baris p = (x, y, z)
3. Kombinasi linear vektor satuan *i, j, k* yaitu : $\vec{p} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

Dengan $\hat{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\hat{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\hat{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\hat{i}$ = vektor satuan dalam arah OX (searah sumbu X)

$\hat{j}$ = vektor satuan dalam arah OY (searah sumbu Y)

$\hat{k}$ = vektor satuan dalam arah OZ (searah sumbu Z)

Misalkan titik P mempunyai koordinat (2, 5, 3) dalam koordinat sistem kartesius. Vektor posisi titik P adalah $\vec{OP} = \vec{p}$ dan vektor $\vec{OP}$ disajikan sebagai koordinat (2, 5, 3) atau $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ atau $2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}$.

Secara umum, jika koordinat titik P (x_1, y_1, z_1) maka :

1. Komponen vektor $\vec{PQ} = \vec{PO} + \vec{OQ} = -\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$
2. Vektor posisi P adalah $\vec{OP} = \vec{p} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ atau $\vec{p} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$
3. Besaran vektor OP adalah $|\vec{OP}| = |\vec{p}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$
4. Jika P (x_1, y_1, z_1) dan Q (x_2, y_2, z_2) maka :

   $\vec{PQ} = \vec{q} - \vec{p} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$

   Sehingga besaran atau panjang vektor $\vec{PQ}$ adalah :

   $|\vec{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z)^2)}$
5. Jika suatu vektor $\vec{a}$ disajikan dalam bentuk linear

   $\vec{a} = a_1 i + a_2 j + a_3 k$, maka besaran atau panjang vektor $\vec{a}$ adalah :

   $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

Contoh 1:

Diketahui : Titik A (2, 1, -4) dan titik B (-2, 3, 5).

Tentukan komponen vektor $\vec{AB}$

Jawab:

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 2 \\ 3 - 1 \\ 5 - (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Contoh 2:

Tentukan besar atau panjang vektor berikut :

1. $\vec{AB}$, dengan titik A (1, 4, 6) dan B (3, 7, 9)
2. $\vec{a} = 2i + j + 3k$

Jawab:

1. $|\vec{AB}| = \sqrt{(3 - 1)^2 + (7 - 4)^2 + (9 - 6)^2}$

   $= \sqrt{2^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9 + 9} = \sqrt{22}$
2. $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$

Sifat-sifat Aljabar Vektor dalam Ruang

Berikut sifat-sifat aljabar vektor dalam ruang :

Saat kalian mempelajari vektor pada bidang, kalian telah mempelajari sifat-sifat operasi vektor. Sifat-sifat tersebut juga berlaku untuk vektor dalam ruang.

Misalkan $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan m adalah bilangan real, maka berlaku sifat berikut :

1. Jika $\vec{a} = \vec{b}$ maka $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ dan $z_1 = z_2$
2. Jika $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ maka $\vec{c} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$
3. Jika $\vec{c} = m\vec{a}$ maka $\vec{c} = \begin{pmatrix} mx_1 \\ my_1 \\ mz_1 \end{pmatrix}$
4. Invers dari vektor $\vec{a}$ adalah $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \\ -z_1 \end{pmatrix}$
5. Perkalian (Dot product) $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ adalah :

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1\,x_2 + y_1\,y_2 + z_1\,z_2$$

Contoh:

Diketahui : vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Tentukan:

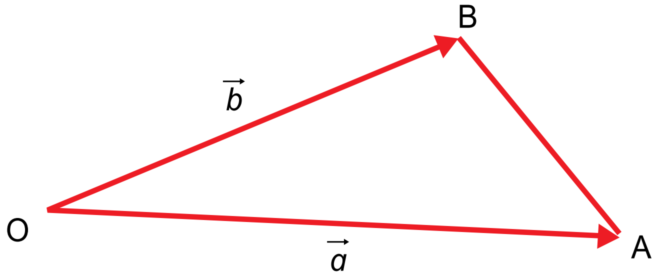
1. $\vec{a} + \vec{b}$
2. $\vec{a} - \vec{b}$
3. $2\vec{b}$
4. $-3\vec{a}$

Jawab:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 \\ 2+(-3) \\ 5+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$
2. $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 2-(-3) \\ 5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$
3. $2\vec{b} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2 \\ 2 \times -3 \\ 2 \times 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$
4. $-3\vec{a} = -3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \times 1 \\ -3 \times 2 \\ -3 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -15 \end{pmatrix}$

Hasil Kali Skalar Dua Vektor (Operasi DOT)

Hasil kali skalar dua vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ yang bukan vektor nol dan dinyatakan sebagai $\vec{a}.\vec{b}$ didefinisikan sebagai $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ dengan θ adalah sudut antara vektor $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ seperti terlihat pada gambar berikut.



Gambar 2.3 Sudut Vektor

Contoh:

Tentukan hasil kali skalar vektor a dan b, jika $|\vec{a}| = 5$ dan $|\vec{b}| = 6$ dan besar sudut antara vektor a dan b adalah 60°.

Jawab:

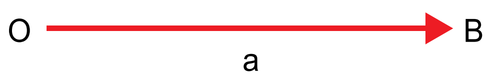
a . b $= |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$

a . b $= 5 \times 6 \times \cos 60^\circ$

$= 30 \times \frac{1}{2} = 15$

Sifat-sifat hasil kali skalar adalah :

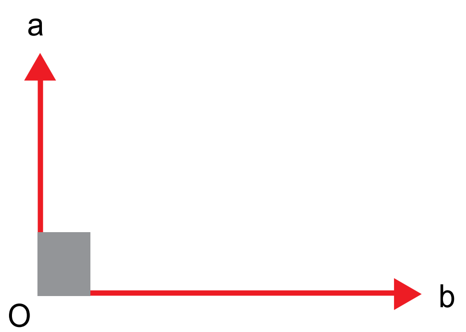
1. Dua vektor yang saling sejajar



Gambar 2.4 Dua Vektor saling sejajar

$$a \cdot b = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$
$$= |\vec{a}||\vec{b}|.1$$
$$= |\vec{a}||\vec{b}|$$

2. Dua vektor yang saling tegak lurus

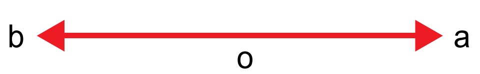


Gambar 2.5 Dua Vektor saling tegak lurus

Jika a dan b merupakan dua vektor yang saling tegak lurus, maka :

$$a \cdot b = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 90^\circ$$
$$= |\vec{a}||\vec{b}|.0$$
$$= 0$$

3. Dua vektor yang berlawanan arah



Gambar 2.6 Dua Vektor saling tegak lurus

Jika a dan b merupakan dua vektor yang arahnya berlawanan, maka :

$$a \cdot b = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 180^\circ$$
$$= |\vec{a}||\vec{b}|.(-1)$$
$$= -|\vec{a}||\vec{b}|$$

4. Tanda hasil kali skalar dua vektor

   Tanda hasil kali skalar dua vektor ditentukan oleh besar sudut yang dibentuk oleh dua vektor tersebut.

Tabel 2.1 Tanda Hasil Kali Skalar Dua Vektor

Besar sudut θ	Tanda
$0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$	Positif
$\theta = 90^\circ$	Nol
$90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$	Negatif

5. Sifat komutatif

   a . b = b . a

   a . b = $|a||b|\cos\theta$ dan b . a = $|b||a|\cos\theta$

   Oleh karena $|a||b| = |b||a|$, maka a . b = b . a

6. Sifat distributif

   a . (b + c) = a . b + b . c

Kalian sudah paham kan bagaimana hasil kali skalar dua vektor? Nah sekarang pemahaman kalian akan diperluas dengan perkalian skalar dua vektor dalam bentuk komponen.

Misalkan vektor a dan b dinyatakan dengan bentuk tripel berikut ini.

b = $a_1i + a_2j + a_3k$ dan b = $b_1i + b_2j + b_3k$ maka :

a . b = $(a_1i + a_2j + a_3k) \cdot (b1i + b_2j + b_3k)$

Dengan menggunakan sifat distributif dan hasil kali skalar dua vektor basis yang saling tegak lurus dan searah, yaitu :

i . I = 1, j . j = 1 , k . k = 1, I . j = 0, I . k = 0 dan j . k = 0

Maka perkalian skalar di atas dapat disajikan sebagai berikut :

Tabel 2.2. Perkalian Skalar Dua Vektor dalam Bentuk Komponen

a . b	b_1i	b_2j	b_3k
a_1j	$a_1\ b^1$	0	0
a_2j	0	$a_2\ b_2$	0
a_3k	0	0	$a_3\ b_3$

Dengan demikian dapat diperoleh rumus sebagai berikut :

$$a \cdot b = a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + a_3\,b_3$$

Contoh Soal:

Ditentukan vektor-vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix}5\\4\\0\end{pmatrix}$. Tentukan :

1. $\vec{a} \cdot \vec{b}$
2. $\vec{a} \cdot \vec{b}$

Jawab:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = (1 . 5) + (2 . 4) + (4 . 0)$

   $= 5 + 8 + 0$

   $= 13$

   Jadi, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 13$

2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = (1 . 1) + (2 . 2) + (4 . 4)$

   $= 1 + 4 + 16$

   $= 21$

   Jadi, $\vec{a} \cdot \vec{a} = 21$

Proyeksi Ortogonal suatu Vektor

Jika lambang vektor proyeksi dari suatu vektor ke vektor lainnya adalah c, maka :

1. Panjang proyeksi vektor **a** ke **b** adalah :

   $$|c| = \frac{a.b}{|b|}$$

2. Panjang proyeksi vektor **b** ke **a** adalah :

   $$|c| = \frac{b.a}{|a|}$$

3. Vektor proyeksi **a** terhadap **b** dinyatakan dengan rumus :

   $$C = \left(\frac{a.b}{|b|^2}\right) b \quad \text{atau} \quad \left(\frac{a.b}{|b|}\right)\left(\frac{b}{|b|}\right)$$

Contoh Soal:

Tentukan vektor satuan dari : a = 2i + j + 2k

Jawab:

$|a| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2 = 3}$

Misalkan vektor satuan a adalah c, maka $c = \frac{a}{|a|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Jadi, $c = \frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j + \frac{2}{3}k$

PENUGASAN

Pada unit 2. “Menata Ruangan Rumah”, meliputi beberapa kajian materi meliputi :

Tujuan:

Pada pembelajaran ini memiliki tujuan penugasan agar peserta didik dapat :

1. Menggambar suatu titik dalam diagram kartesius tiga dimensi, dan mengetahui panjang suatu garis serta membandingkan panjangnya.
2. Menerapkan sifat-sifat hasil kali skalar

Alat dan bahan yang digunakan: Penggaris dan alat tulis.

Langkah-langkah Kegiatan:

a. Kegiatan 1.1. Menggambar Titik pada Diagram Cartesius
   Untuk dapat menggambar titik pada diagram kartesius, perhatikan dan selesaikan permasalahan berikut ini.

   Masalah 1.1:

   Menggambar titik pada diagram Cartesius

   Diketahui titik A (-5, 0, 2), B(1, 3, -1) dan C (3, 4, -2)

   1) Gambarlah titik A, B dan C tersebut dalam diagram Cartesius.
   2) Amatilah ketiga ketiga titik tersebut. Apakah ketiga titik tersebut segaris?
   3) Carilah perbandingan panjang AB : BC.

Alternatif Jawaban:

Langkah Mengerjakan

Untuk dapat mengerjakan soal tersebut, ikuti Langkah-langkah berikut :

1) Buat diagram kartesius dalam ruang (memuat sumbu X, Y dan Z)
2) Menentukan titik pada diagram kartesius sesuai dengan koordinatnya (ingat sifat dan caranya)
3) Setelah didapat tiga titik tersebut, diukur panjang garis AB dan BC, kemudian dibandingkan.

Untuk dapat memahami dan menerapkan sifa-sifat hasil kali skalar, perhatikan dan selesaikan permasalahan berikut ini.

Masalah 1.2:

Penggunaan sifat Hasil Kali Skalar

Diketahui titik A (0, -6, 1), B (3, 1, -2) dan C (8, 5, 1). Jika $\vec{AB}$ wakil dari $\bar{u}$ dan $\vec{BC}$ wakil dari $\bar{v}$, hitunglah $\bar{u}\,.\bar{v}$

Alternatif Jawaban:

Ikuti langkah-langkah penyelesaian masalah di atas, yaitu dengan mengisi titik-titik yang disediakan.

$$\bar{u} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \text{ dan}$$

$$\bar{v} = \vec{BC} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\text{Jadi } \bar{u}\,.\,\bar{v} = \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = 15 + \dots_{\dots} + 3 = \dots_{\dots\,\dots}$$

LATIHAN

Kerjakan soal di bawah ini dengan benar!

1. Diketahui vektor $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dan $\bar{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Tentukan hasil dari :
   a. $2\bar{a} + \bar{b}$
   b. $3\bar{a} - 2\bar{b} + \bar{c}$
2. Sebuah rancangan atap suatu rumah berbentuk segitiga ABC. Titik P titik berat Δ ABC dan Q titik tengah AC. Jika $\vec{CA} = \bar{u}$ dan $\vec{CB} = \bar{v}$ maka $\vec{PQ}$ = ...
3. Diketahui P (6, 4, 2), Q (8, 6, 4) dan R (2, 2, 2). Tunjukkan bahwa OPQR adalah jajar genjang.
4. Diketahui vektor $\bar{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\bar{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   Tentukan panjang vektor $2\bar{a} - 3\bar{b} + 4\bar{c}$
5. Jika vektor $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ membentuk sudut 60° dan $|\bar{a}| = 4$ dan $|\bar{b}| = 3$, tentukan nilai dari $\bar{a}.(\bar{a} - \bar{b})$
6. Tentukan a . b jika diketahui $|a|$, $|b|$ dan θ adalah sudut antara a dan b berikut :
   a. $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$ dan θ = 60°
   b. $|\bar{a}| = 4$, $|\bar{b}| = 3$ dan θ = 90°
   c. $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 1$ dan θ = 120°
   d. $|\bar{a}| = 8$, $|\bar{b}| = 7$ dan θ = 45°
7. Jika a = I + 3j – 2k dan b = 4i – 2j + 4k, maka hitunglah :
   a. a . b
   b. 3a . 2b
   c. (2a + b) . (a – 2b)
   d. (a + b) . (a – b)
8. Pak Budi berencana membuat rancangan rumah yang berbentuk jajargenjang. Misalkan jajargenjang tersebut diberi nama ABCD, dengan A (2, 3, 1), B (4, 5, 2) dan D (2, -1, 4). Maka hitunglah vektor $\vec{AB}\,.\,\vec{AC}$
9. Diketahui rancangan tangga sebuah rumah berbentuk segitiga, yaitu ΔABC, dengan A (1, 1, 2), B (4, 2, -3) dan C (0, 3, 0). Hitunglah proyeksi vektor orthogonal dari $\vec{AB}$ pada $\vec{AC}$.
10. Diketahui vektor $\bar{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\bar{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$. Proyeksi skalar orthogonal $\bar{p}$ pada arah $\bar{q}$ adalah $\sqrt{5}$. Tentukanlah berapa nilai x yang memenuhi.

Rangkuman

1. Secara geometri, suatu vektor dapat digambarkan sebagai ruas garis berarah. Ruas garis tersebut memiliki panjang dan arah
2. Penjumlahan dua vektor atau lebih secara geometris dapat dilakukan dengan aturan segitiga dan aturan jajargenjang
3. Suatu vektor sembarang $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dalam bidang dapat dicari panjang (besarnya) dengan rumus $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$
4. Suatu vektor sembarang $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dalam ruang dapat dicari panjang (besarnya) dengan rumus $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
5. Perkalian skalar vektor (dot product) $\vec{a}$ dan $\vec{b}$, dinotasikan dengan $\vec{a} \cdot \vec{b}$ dan didefinisikan sebagai $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$.
6. Jika vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ dan $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$, dan misalkan sudut antara kedua vektor adalah θ, nilai cos θ dapat ditentukan dengan : $\cos \theta = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\ \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

UJI KOMPETENSI

Pilihlah satu jawaban yang benar dengan memberi tanda silang (x) pada huruf A, B, C, D, dan E

1. Pada segitiga ABC, diketahui A(-2, 2, -5), B (3, -8, 5) dan C(-1, -3, 0). Titik Q pada AB sehingga AQ : QB = 3 : 2. Komponen vektor (CQ) □ adalah ....

   a. $\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$

   b. $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

   c. $\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

   d. $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

   e. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Diketahui titik A (1, -2, -8) dan titik B (3, -4, 0). Titik P pada perpanjangan garis AB sehingga $\vec{AP} = -3\,\vec{PB}$. Persamaan vektor posisi $\bar{p}$ adalah ....

   a. -3i – j – 12k
   b. –i -5j -2k
   c. 4i – 5j – 4k
   d. 4i – 5j + 4k
   e. –j – 12k

3. Diketahui besar vektor $|p| = 10$, $|q| = 6$ dan sudut antara p dan q adalah 60°. Maka besar sudut $|p - q|$ adalah ....

   a. $2\sqrt{17}$
   b. $2\sqrt{19}$
   c. 12
   d. 9
   e. 14

4. Diketahui A (2, 3, -1) dan B (8, -3, 11). Jika P titik pada ruas garis AB sedemikian sehingga PB : AP = 5 : 1, maka vektor posisi titik P adalah ....
   a. 3i + 2j + k
   b. 3i + 2j – k
   c. 2i + j + 3k
   d. I + 2j – 3k
   e. I – 2j + 3k
5. Diketahui koordinat A (6, -2, -6), B (3, 4, 6) dan C (9, x, y). Jika titik-titik A, B dan C kolinear, maka nilai x – y sama dengan ....
   a. -18
   b. 4
   c. 6
   d. 10
   e. 18
6. Diketahui vektor $\overline{a} = 2\overline{i} - 3\overline{j} + 5\overline{k}$ dan vektor $\overline{b} = -3\overline{i} - 5\overline{j} + 2\overline{k}$. Jika θ adalah sudut antara $\overline{a}$ dan b , maka nilai tan θ adalah ....
   a. -½ √3
   b. -1/3 √3
   c. 1/3 √3
   d. √3
   e. ½ √3
7. Diberikan vektor $\overrightarrow{OA} = \overline{i} + \overline{k}$, $\overrightarrow{OB} = \overline{j} + \overline{k}$, $\overrightarrow{OC} = m\overline{j} + 4\overline{k}$. Dan besar sudut ABC = 60o, maka kuadrat jumlah nilai m adalah ....
   a. 1
   b. 4
   c. 9
   d. 16
   e. 25
8. Diketahui $\overline{a} = (3, 4, k_1)$ dan $\overline{a} = (6, 1, k_2)$. Jika $|\overline{a} - \overline{b}| = \sqrt{34}$ dan $k_1 \cdot k_2 = 3$, maka nilai $k_1^2 + k_2^2$ adalah ....
   a. 5
   b. 10
   c. 26
   d. 50
   e. 82
9. Diketahui vektor posisi titik A dan B berturut-turut adalah $\overline{a} = x\overline{i} + 4\overline{j} + 7\overline{k}$ dan $\overline{b} = 6\overline{i} + y\overline{j} + 14\overline{k}$. Jika titik A dan B segaris, maka nilai $(x – y)^2$ sama dengan ....
   a. 9
   b. 16
   c. 25
   d. 49
   e. 64
10. Diketahui vektor-vektor a = -i + 2j + 2k, b = 3i – 5j + 2k dan c = j + 8k. Apabila c = pa + qb, maka nilai $(p + q)^2$ sama dengan ....
   a. 2
   b. 4
   c. 9
   d. 16
   e. 25

Kunci Jawaban

1. (A) $\begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$
2. (B) –i -5j -2k
3. (A) 2√17
4. (D) I + 2j – 3k
5. (A) -18
6. (D) √3
7. (C) 9
8. (A) 5
9. (B) 16
10. (C) 9

KRITERIA PINDAH MODUL

Setelah seluruh materi dan setiap kompetensi dasar dipelajari dengan seksama maka cobalah untuk mengerjakan latihan soal yang disediakan, baik secara individu, kelompok maupun dengan bimbingan tutor. Semakin rajin peserta didik dalam mengerjakan soal penugasan, diharapkan semakin terampil dan cepat mengeneralisasikan setiap permasalahan baik yang disediakan dalam modul ataupun dalam kaitannya dengan permasalahan sehari-hari.

Pada tahap berikutnya, kerjakan soal-soal dalam latihan, untuk mengukur penguasaan materi yang diperoleh dengan menggunakan rumus di bawah ini.

$$\text{Skor penilaian} = \frac{\text{Jumlah jawaban benar}}{\text{jumlah soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan yang Anda capai :

90-100% = Baik Sekali

80-89% = Baik

70-79% = Cukup

60-69% = Kurang

Jika peserta didik mampu mencapai skor penilaian 80% atau lebih (tingkat penguasaan “baik” atau “sangat baik) maka dapat melanjutkan ke Standar Kompetensi berikutnya, tetapi jika penilaian kurang dari 80% dianjurkan untuk mengulang kembali Standar Kompetensi tersebut, terutama pada bagian yang belum dikuasai. Tanyakan dengan teman atau dengan bimbingan tutor.

Saran Referensi

Untuk menambah wawasan dalam pemahaman terkait modul 2 yang meliputi materi vektor pada bidang dan vektor dalam ruang, maka diharapkan peserta didik mencari sumber atau referensi lain selain modul ini. Saran referensi tersebut antara lain:

1. Judul Buku: “Ensiklopedia Matematika Terapan”, Karya Sue Thomshon dan Ian Fortster, dengan judul tema terjemahan:
   a. Matematika dalam Masyarakat
   b. Matematika dalam Olahraga
   c. Matematika dalam Lingkungan
   d. Matematika dalam Tempat Kerja
   e. Matematika dalam Makanan
   f. Matematika dalam Rancang Bangun
   g. Matematika dalam Televisi
   h. Matematika dalam Sains
   i. Matematika dalam Teknologi
   j. Matematika dalam Perjalanan
   k. Matematika dalam Rumah
   l. Matematika dalam Tubuh
2. Judul Buku: “Tingkatkan Kemampuan Otak Anda (Improve Your Brain Power)”, Karya Jackie Guthrie dan Tim Preston
3. Judul Buku: “Referensi Matematika dalam Kehidupan Manusia”, Karya Dr. Wahyudin dan Drs. Sudrajat, M.Pd.
4. Judul Buku: “Panduan Belajar Matematika SMA.”, Karya Sumanto
5. Sumber media internet (melalui browsing: anistuing.blogspot.co.id, fedraadi. wordpress. com, dan lain-lain)

Daftar Pustaka

Haryati Sri. 2007. Matematika Pendekatan Tematik dan Induktif Tingkat V Derajat Mahir 1 untuk Paket C Setara Kelas X SMA/MA". Jakarta : PT. Perca.

Juniati E.. Haryati Sri. 2007. Matematika Pendekatan Tematik dan Induktif, Program Kesetaraan Paket C Kelas XI Program IPS dan Bahasa". Jakarta : PT. Perca.

Noormandiri, B.K., 2016. Matematika untuk SMA/MA kelas X Kelompok Peminatan Matematika dan Ilmu-Ilmu Alam". Jakarta : Erlangga.

Wirodikromo, S..2002. Matematika untuk SMA Kelas X. Jakarta : Erlangga.

Yuana R.A., Indriyastuti. 2016. Buku Siswa, Perspekstif Matematika 1 untuk kelas X SMA dan MA Kelompok Peminatan Matematika dan Ilmu-Ilmu Alam". Solo : PT. Tiga Serangkai Pustaka Mandiri.